SOLUCIÓN PRUEBA Nº 3 VERSIÓN A 2017-1

1. *a*) **[15pt]** Dada la función: $f(x) = x^3(x-4)$ Se pide:

   i) Intervalos de crecimiento y decrecimiento así como sus extremos relativos, si es que los hay.
   Solución:
   Se tiene que $f'(x) = 4x^2(x-3)$ por lo que sus puntos críticos son $x = 0, x = 3$, realizando la tabla de signos tenemos que :

x	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
f	f es decreciente $\searrow$		f es decreciente $\searrow$	punto mínimo	f es creciente $\nearrow$

   - f crece en $]3,+\infty[$ y decrece en $]-\infty,3[$
   - $(3,-27)$ es un punto mínimo y no tiene máximos.

5 puntos

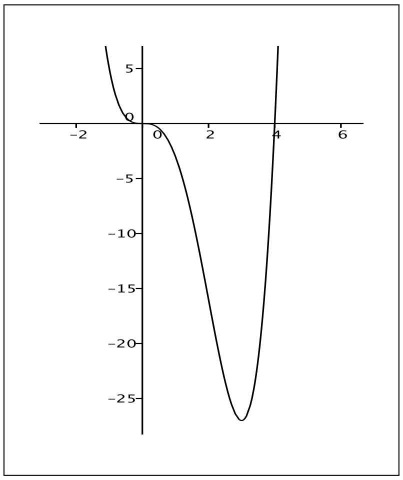
   ii) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión, si es que los hay.
   Solución:
   Se tiene que $f''(x) = 12x(x-2)$ por lo que sus puntos críticos son $x = 0, x = 2$, realizando la tabla de signos tenemos que :

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
f	$\cup$	inflexión	$\cap$	inflexión	$\cup$

   - f es cóncava hacia arriba en $]-\infty,0[,]2,\infty[$ y cóncava hacia abajo en $]0,2[$
   - $(0,0),(2,-16)$ son puntos de inflexión.

5 puntos

   iii) Gráfica de $f(x)$
   Solución:



5 puntos

b) **[10pt]** Hallar el valor de $c \neq 0 \in \mathbb{R}$, de modo que la función

$$y = f(x) = \frac{e^x}{x^2 + c}$$

tenga un único punto crítico. ¿Se trata de un máximo, mínimo o punto de inflexión?.

Solución:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + c = 0$$

Luego para tener un único punto crítico $\triangle = 4 - 4c = 0 \Rightarrow c = 1$.

5 puntos

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Así tenemos un punto crítico $x = 1$, pero notar que $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 1$, por lo que $x = 1$ no es un extremo. Luego $x = 1$ es un punto de inflexión.

5 puntos

2) Calcule los siguientes límites

a) **[10pt]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2(x) - x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2(x) - x^2} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin(2x) - 2x} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos(2x) - 2} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4\sin(2x)} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8\cos(2x)} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

5+5 puntos

b) **[10pt]** $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$

Solución:

Sea $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x = \dfrac{\ln x}{\csc x}$

3 puntos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\csc x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{x \sin x - \cos x} = 0$$

5 puntos

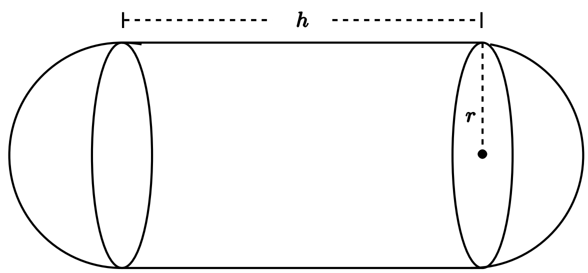
Por lo que

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} = 1$$

2 puntos

3) **[15pt]** Se requiere diseñar un estanque de almacenamiento de liquido. Las especificaciones demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos que almacenen $18\pi cm^3$. ¿Cuáles serán las dimensiones, para que al realizar su construcción, la cantidad de material usada sea mínima?¿Cuál es esa cantidad mínima de material?

Solución:



Tenemos que $V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 18\pi \Rightarrow h = \frac{18}{r^2} - \frac{4}{3}r$

$$A = 2\pi r h + 4\pi r^2 = 2\pi\left(\frac{18}{r} - \frac{4r^2}{3} + 2r^2\right)$$

5 puntos

$$A' = 2\pi\left(\frac{-54+4r^3}{3r^2}\right)$$

Así los puntos críticos son $r = 0$ que se descarta por ser una dimensión y $r = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

5 puntos

$$A'' = 2\pi\left(\frac{36}{r^3} + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow A''\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0$$

Lo que implica que $r = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ es un mínimo, $h = 0$ y $A = \frac{36\pi}{\sqrt[3]{4}}$

5 puntos